

Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)
Физический Институт Академии Наук
им. П.Н.Лебедева

Способы расчёта задач гидродинамики на примере осесимметричной аккреции Бонди-Хойла.

Выпускная квалификационная работа бакалавра.

студент Щербаков Р.В. группа 128

24 июня 2005 года

Введение.

Уравнения гидродинамики:

- уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

- уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (2)$$

- условие идеальности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (3)$$

Уравнения гидродинамики:

- уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

- уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \quad (2)$$

- условие идеальности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (3)$$

Сложность решения вследствие:

- это система уравнений в частных производных,
- уравнения нелинейны,
- допускают разрывные решения,
- решение неединственно.

Способы решения уравнений гидродинамики



Численное решение

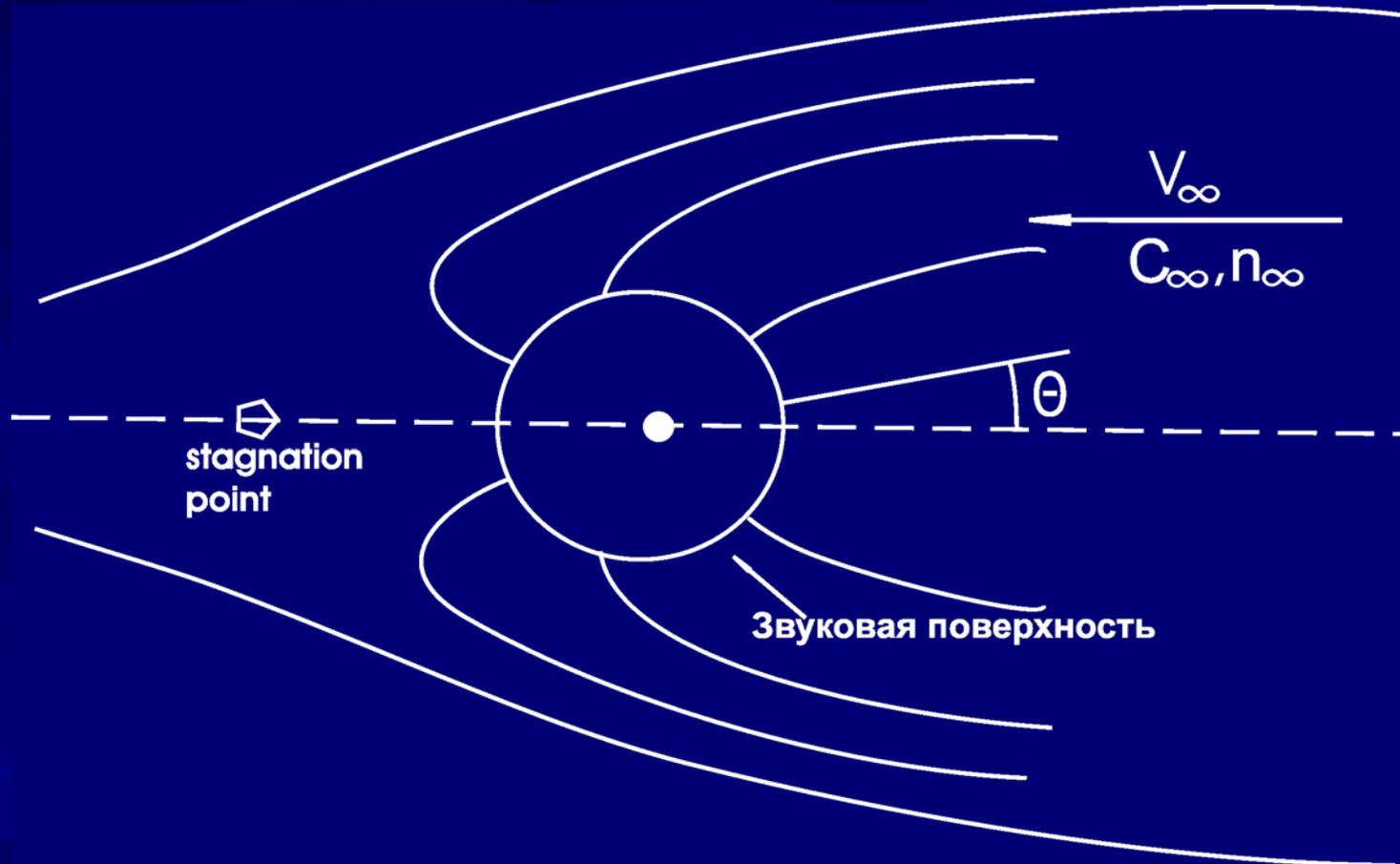
- Решение большинства задач с помощью простых алгоритмов
- Быстрое повышение точности вследствие повышения вычислительной мощности



Аналитическое решение

- Сложность процедуры решения
- Появление и развитие систем символьного решения задач

Аккреция Бонди-Хойла

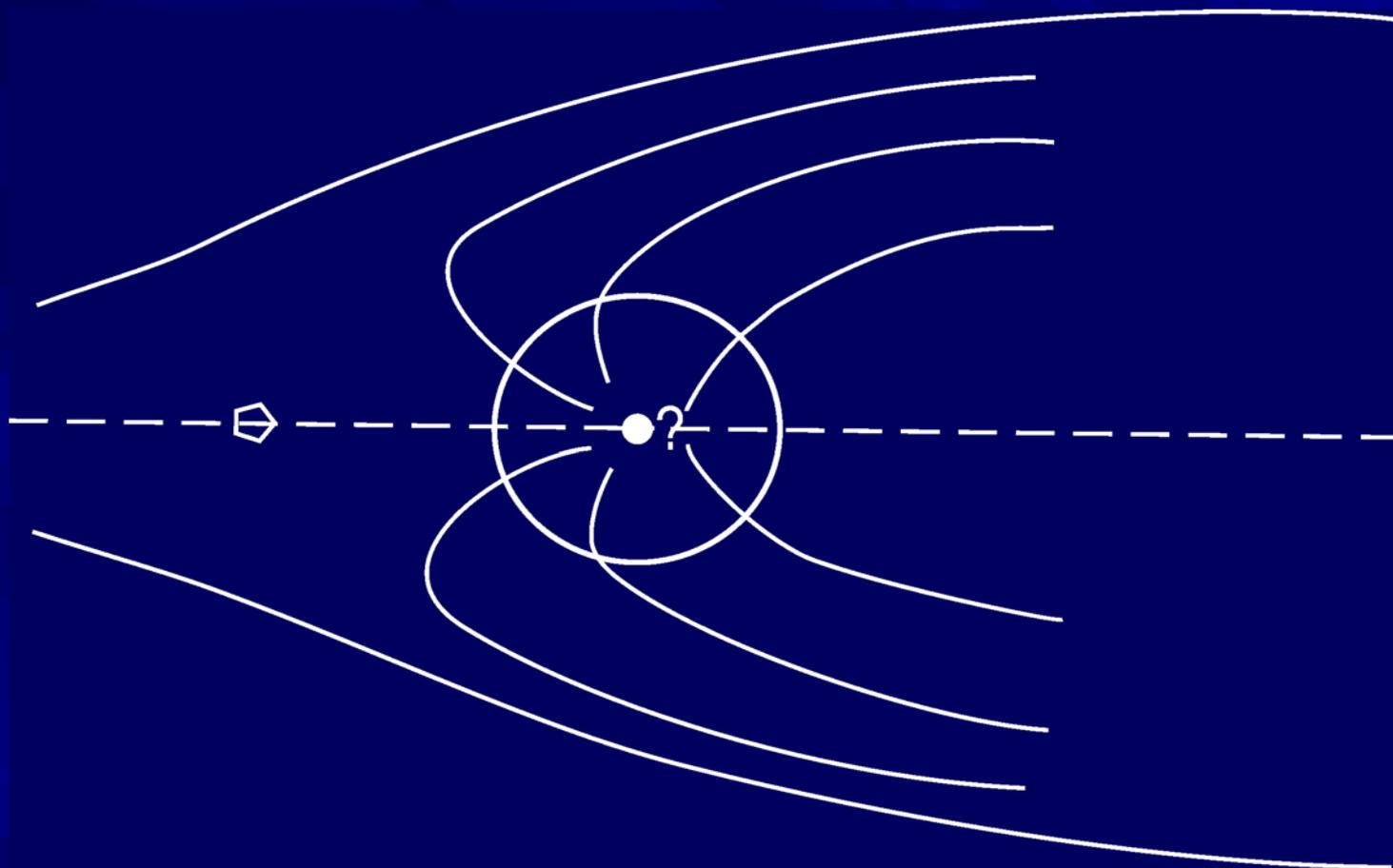


Свойства выбранной модели

- ❖ предполагается стационарное осесимметричное течение
- ❖ гладкое прохождение звуковой поверхности
- ❖ нулевой момент импульса газа относительно оси симметрии
- ❖ размер объекта близок к гравитационному радиусу
- ❖ пренебрегаем взаимодействием падающего вещества с поверхностью объекта
- ❖ наличие малого параметра

$$\varepsilon = \frac{v_{\infty}}{c_{\infty}} \leq 1$$

Что нас интересует?



Метод уравнения Брэдшоу-Шэффранова

$\Phi(r, \theta)$ — потенциал скорости, по определению

$$n\mathbf{v} = \frac{\nabla\Phi \times \mathbf{e}_z}{2\pi r \sin\theta}$$

Уравнение $\Phi(r, \theta) = \text{const}$ определяет линию тока.

Сферическая симметрия

$$\Phi = \Phi_0(1 - \cos\theta)$$

Первое приближение к сферической симметрии

$$\Phi = \Phi_{(0)} + \Phi_{(1)} = \Phi_0(1 - \cos \theta + \varepsilon g(r) \sin^2 \theta),$$

при этом $g(r) \rightarrow k_{\text{ин}}(\Gamma) \left(\frac{r}{r_*}\right)^{-1/2}$ когда $r \rightarrow 0$.

Где r_* — радиус звуковой поверхности, которую в первом приближении можно считать сферой.

Однако $g(r)$ расходится в нуле, при

$$r_x = (\varepsilon k_{\text{ин}}(\Gamma))^2 r_*$$

$\Phi_{(1)}$ достигает $\Phi_{(0)}$.

Воспользуемся первым приближением для получения начальных условий на некотором r_0 , таком что

$$r_0 \ll r_*, \quad \text{и} \quad \Phi_{(1)} \ll \Phi_{(0)}.$$

Без пренебрежения давлением

Упрощающие предположения

1. Плоское пространство с метрикой $\eta_{\mu\nu}$.
2. Тангенциальные скорости намного меньше радиальных. Все тангенциальные силы намного меньше радиальных.
3. Внутренняя энергия (энтальпия) газа намного меньше его гравитационной энергии.
4. Решение для $\theta = \theta(\theta_0, r)$ аналитично по своим переменным. Ищем решение в виде (θ — нечётная функция θ_0)

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_0^{2n+1} k_{2n+1}(r)$$

5. Решение не зависит от выбора r_0 .

Без пренебрежения давлением

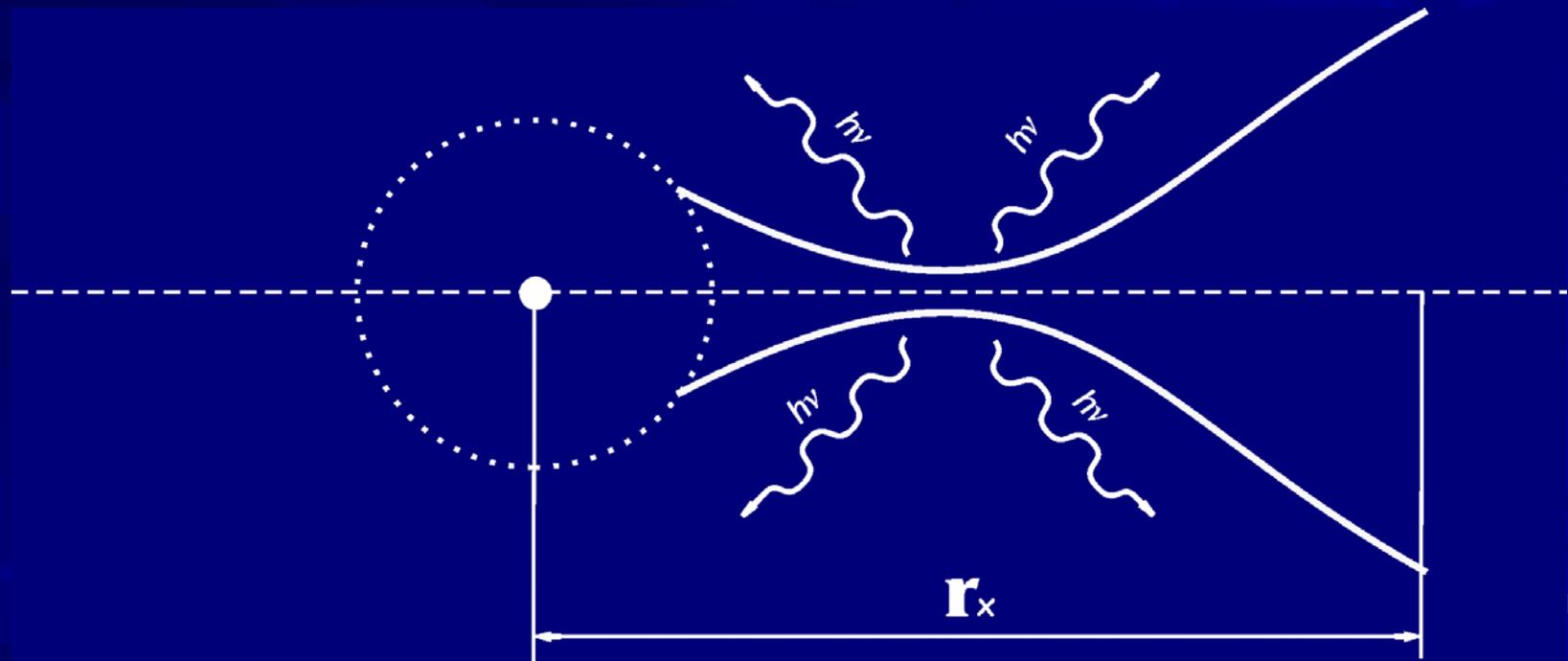
Уравнение

$$x = \frac{c_*^2 r}{4r_g}$$

$$\partial_x \left[x^{\frac{3}{2}} \partial_x \theta(\theta_0, x) \right] = -4 \left(\frac{x}{x_0} \right)^{\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} - \Gamma \right)} \frac{\left[\frac{\sin \theta(\theta_0, x)}{\sin \theta_0} \partial_{\theta_0} \theta(\theta_0, x) \right]^{2-\Gamma}}{(\partial_{\theta_0} \theta(\theta_0, x))} \partial_{\theta_0} \left(\frac{\sin \theta_0}{\sin \theta(\theta_0, x)} \frac{1}{\partial_{\theta_0} \theta(\theta_0, x)} \right)$$

Без пренебрежения давлением

Результаты



Расчёт энерговыделения

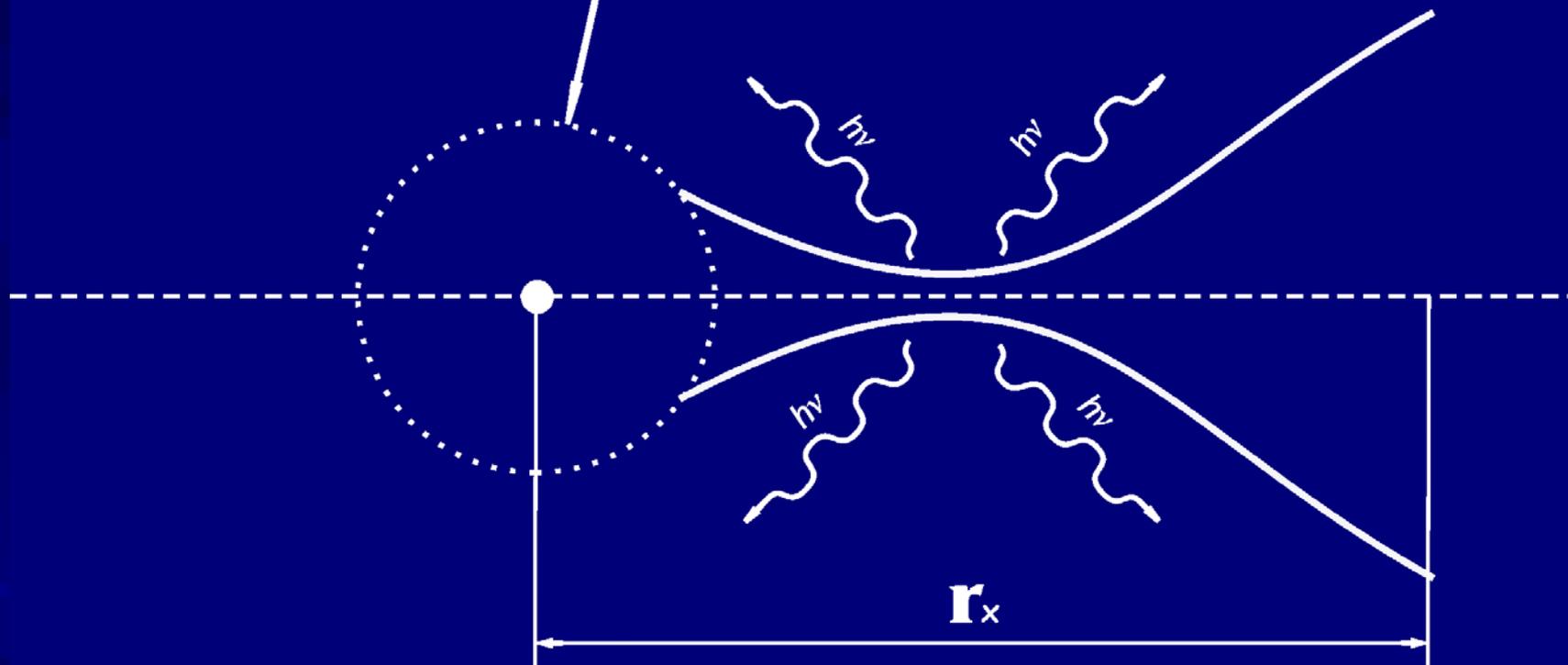
$$\frac{L_x}{L_{\text{сф}}} = \frac{3(\Gamma - 1)}{320} k_x^{-1-\Gamma} \left(\frac{r_x}{r_g} \right)^{3/4(1-\Gamma)}$$

При фокусировке вблизи звуковой поверхности

$$\Gamma = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{L_x}{L_{\text{сф}}} \propto 10^2!!!$$

Что произойдёт вблизи самого объекта?

? турбулентность
нестационарное течение



Выводы

- ✓ Нерадиальные возмущения в аккреции Бонди способны неограниченно усиливаться и приводить к изменению структуры течения
- ✓ Эффективность аккреции Бонди-Хойла может намного превышать эффективность сферически симметричного случая
- ✓ Вопрос нуждается в более детальном изучении