

Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)
Физический Институт Академии Наук
им. П.Н.Лебедева

**Новые способы расчёта и исследования свойств
аксиально-симметричных гидродинамических течений.**

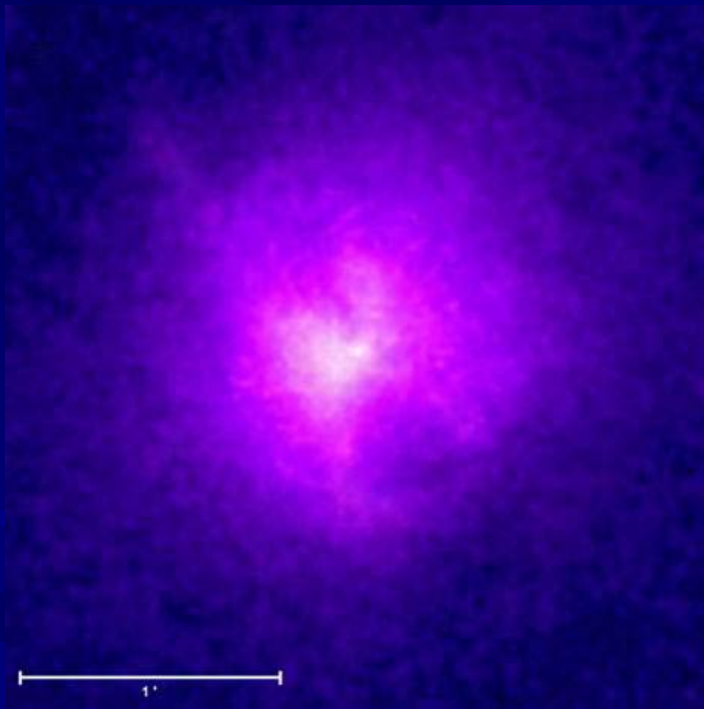
студент Щербаков Р.В. группа 128
shcher@gmail.com

XLVIII Научная конференция МФТИ,
26 ноября 2005 года

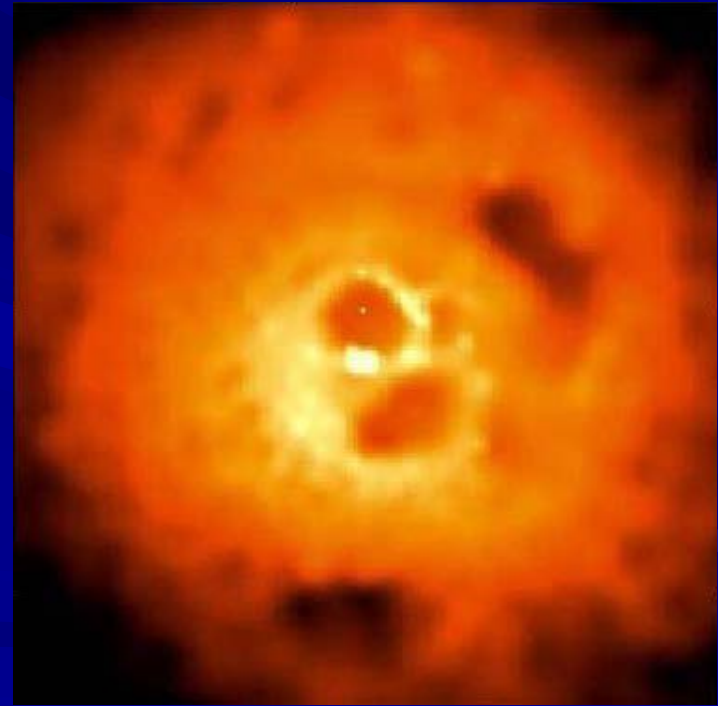
Задачи, требующие решения

**Бездисковая аккреция
на галактические центры и объекты звёздных масс**

Слабые рентгеновские источники



Hydra A Cluster

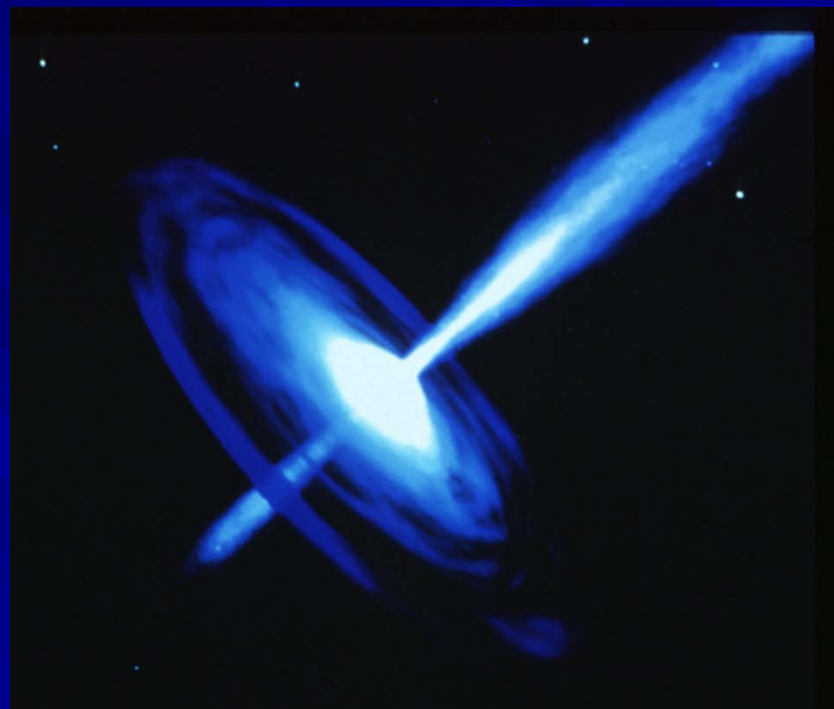
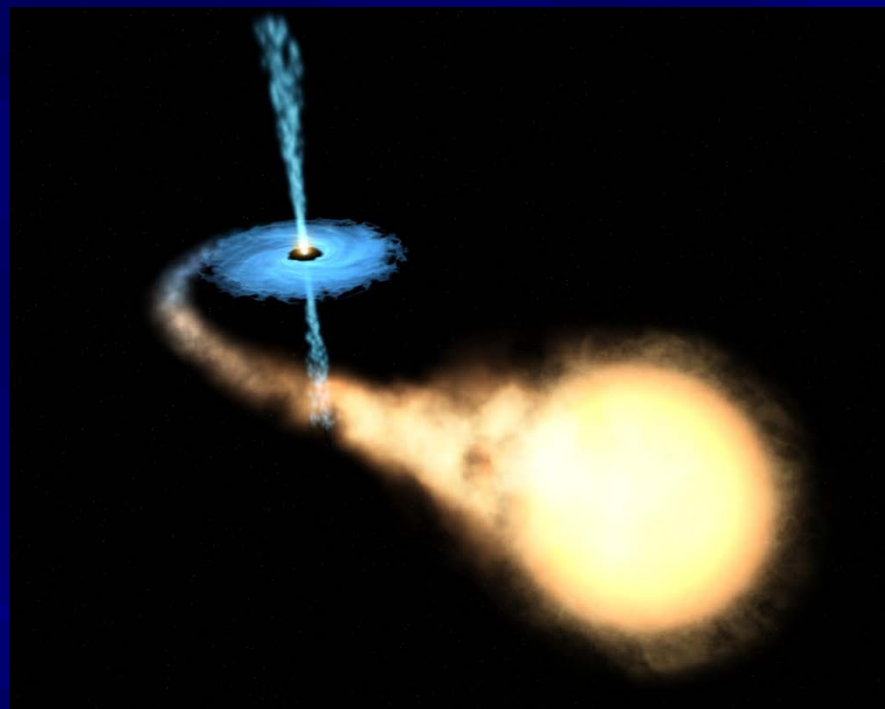


NGC 1275

Задачи, требующие решения

Аккреционные диски в двойных системах

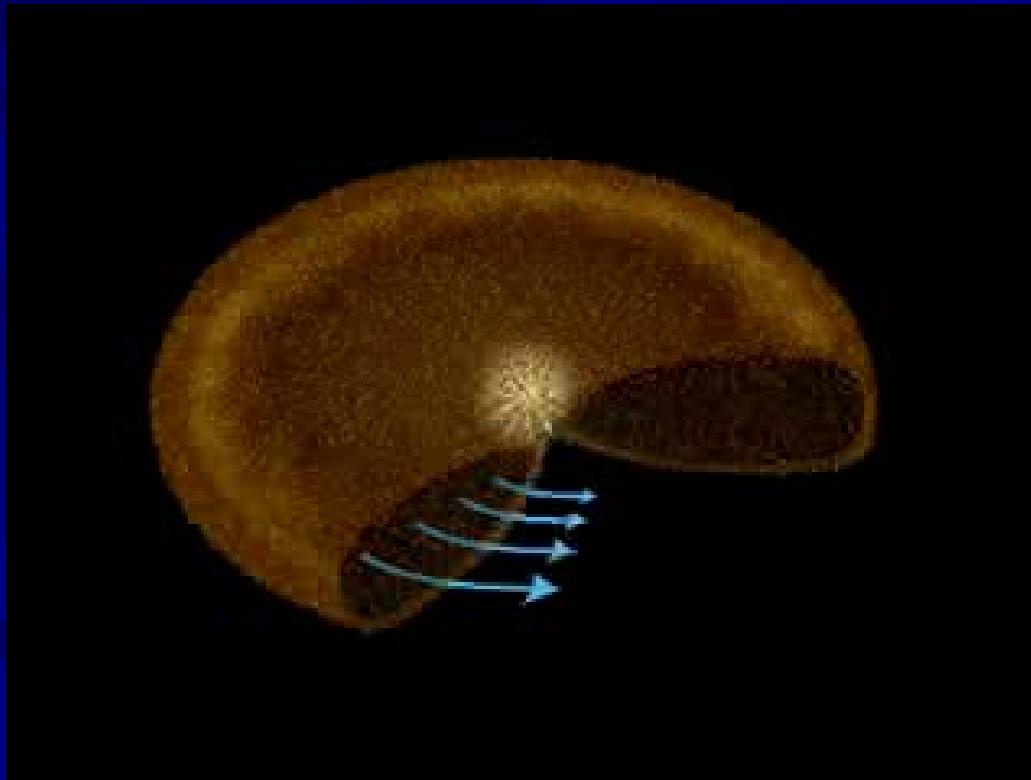
Структура дисков, струйные выбросы



Задачи, требующие решения

Эволюция дисковых систем

Образование планетных систем



Уравнения идеальной гидродинамики. Общий вид.

- уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

- уравнение Эйлера

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}$$

- условие идеальности

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s = 0$$

ρ – плотность вещества, $\vec{v}$ – скорость вещества
 s – энтропия, p – давление, $\vec{g}$ – ускорение свободного падения

Частный случай

- Стационарность течения
- Пренебрегаем самогравитацией вещества
- Энтропия постоянна во всём пространстве
- Вещество – идеальный газ
- Рассматриваем область, связанную линиями токами газа



- сохранение количества вещества

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- теорема о циркуляции

$$\oint \vec{v} d\vec{l} = \text{const}$$

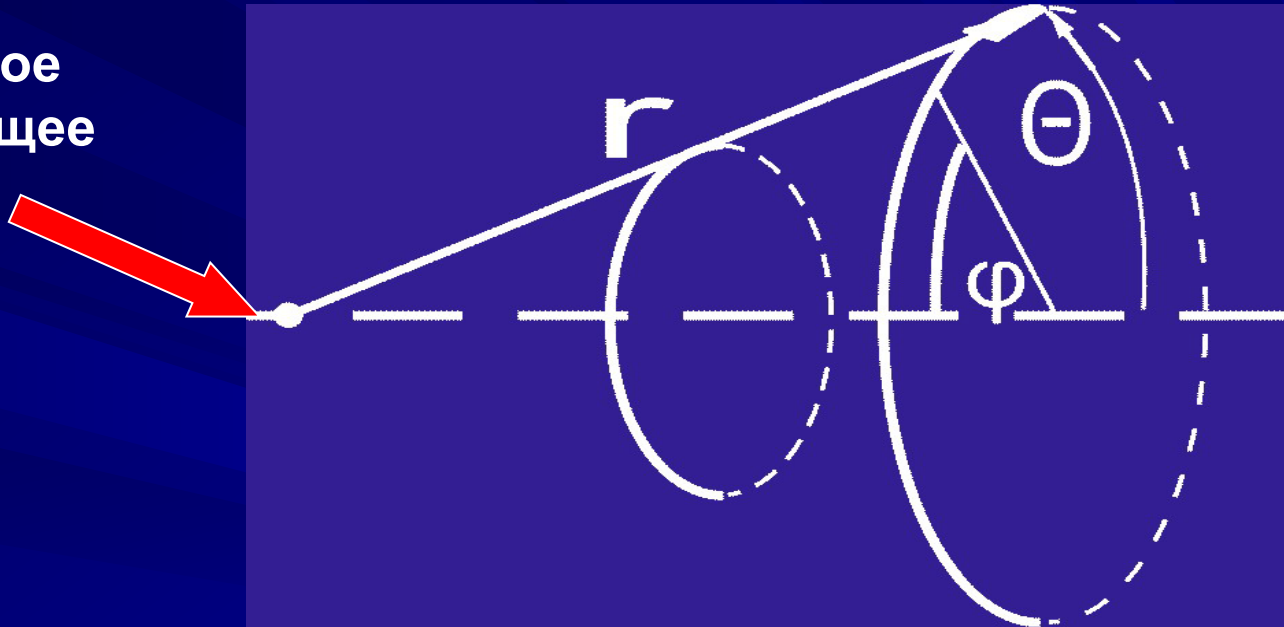
- интеграл Бернулли

$$w + \phi_g + \frac{v^2}{2} = \text{const}$$

w – удельная энтальпия вещества, ϕ_g – гравитационный потенциал

Полярная система координат (r, Θ, φ)

Центральное
гравитирующее
тело



Осевая симметрия

=

Физические величины
не зависят от φ

Система уравнений

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r) = \frac{L}{r}$$

$$\frac{c_\infty^2 \rho^{\Gamma-1}}{(\Gamma-1) \rho_\infty^{\Gamma-1}} - \frac{c^2 r_g}{2r} + \frac{1}{2} (v_r^2 + v_\theta^2 + L^2/r^2) = E n$$

$E n$ – удельная энергия вещества, L – удельный угловой момент,
 r_g – гравитационный радиус тела, c – скорость света,
 c_∞ – скорость звука на большом удалении от объекта,
 ρ_∞ – соответствующая плотность, Γ – показатель адиабаты газа

Два потенциала

Первый подход

$$\rho \vec{v} = \frac{\nabla \Phi \times \mathbf{e}_\phi}{2\pi r \sin \theta}$$

$\Phi(r, \theta)$ – потенциал Грэда-Шафранова

**Автоматическое выполнение
уравнения непрерывности**

Второй подход

$$\vec{v} = \nabla \Phi + \vec{\delta}$$

$\Phi(r, \theta)$ – потенциал скорости

**Автоматическое выполнение
теоремы о циркуляции**

Второй подход

■ позволяет выразить плотность

$$\rho = \rho_{\infty} \left(\frac{\Gamma - 1}{c_{\infty}^2} \right)^{\frac{1}{\Gamma-1}} \left(-\frac{r_g c^2}{2r} + \frac{1}{2} (\Phi_r^2 + \Phi_{\theta}^2 / r^2 + L^2 / r^2) - En \right)^{\frac{1}{\Gamma-1}}$$

■ и получить замкнутое уравнение на $\Phi(r, \theta)$.

$$\begin{aligned} & -(\Gamma - 1) \cot(\theta) \Phi_{\theta}^3 - ((\Gamma + 1) \Phi_{\theta\theta} + r (2(\Gamma - 2) \Phi_r + r(\Gamma - 1) \Phi_{rr})) \Phi_{\theta}^2 + \\ & + r ((\Gamma - 1) \cot(\theta) (r_g c^2 - r \Phi_r^2 + 2r En) - 4r \Phi_r \Phi_{r\theta}) \Phi_{\theta} + \\ & + r ((\Gamma - 1) \Phi_{\theta\theta} (r_g c^2 - r \Phi_r^2 + 2r En) + r (\Phi_r (r_g (2\Gamma - 3) c^2 - 2r(\Gamma - 1) \Phi_r^2 + 4r En(\Gamma - 1)))) + \\ & + r^2 ((r_g c^2 + 2r En) (\Gamma - 1) - r(\Gamma + 1) \Phi_r^2) \Phi_{rr} = 0 \quad (\text{в случае } L=0) \end{aligned}$$

Падение вещества $L \neq 0$ на компактный объект (ЧД, НЗ, БК)



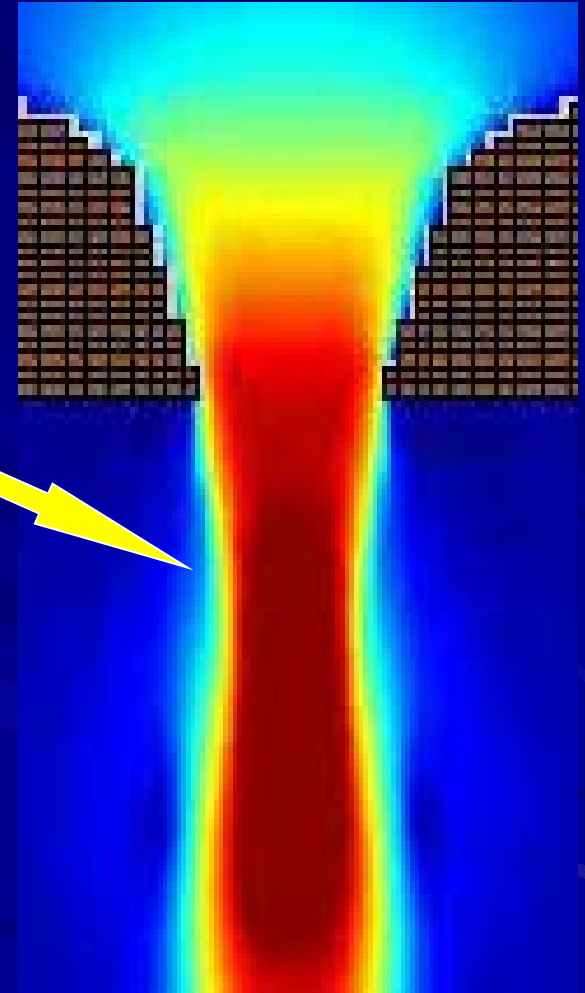
Падение вещества $L=0$ на компактный объект (ЧД, НЗ, БК)



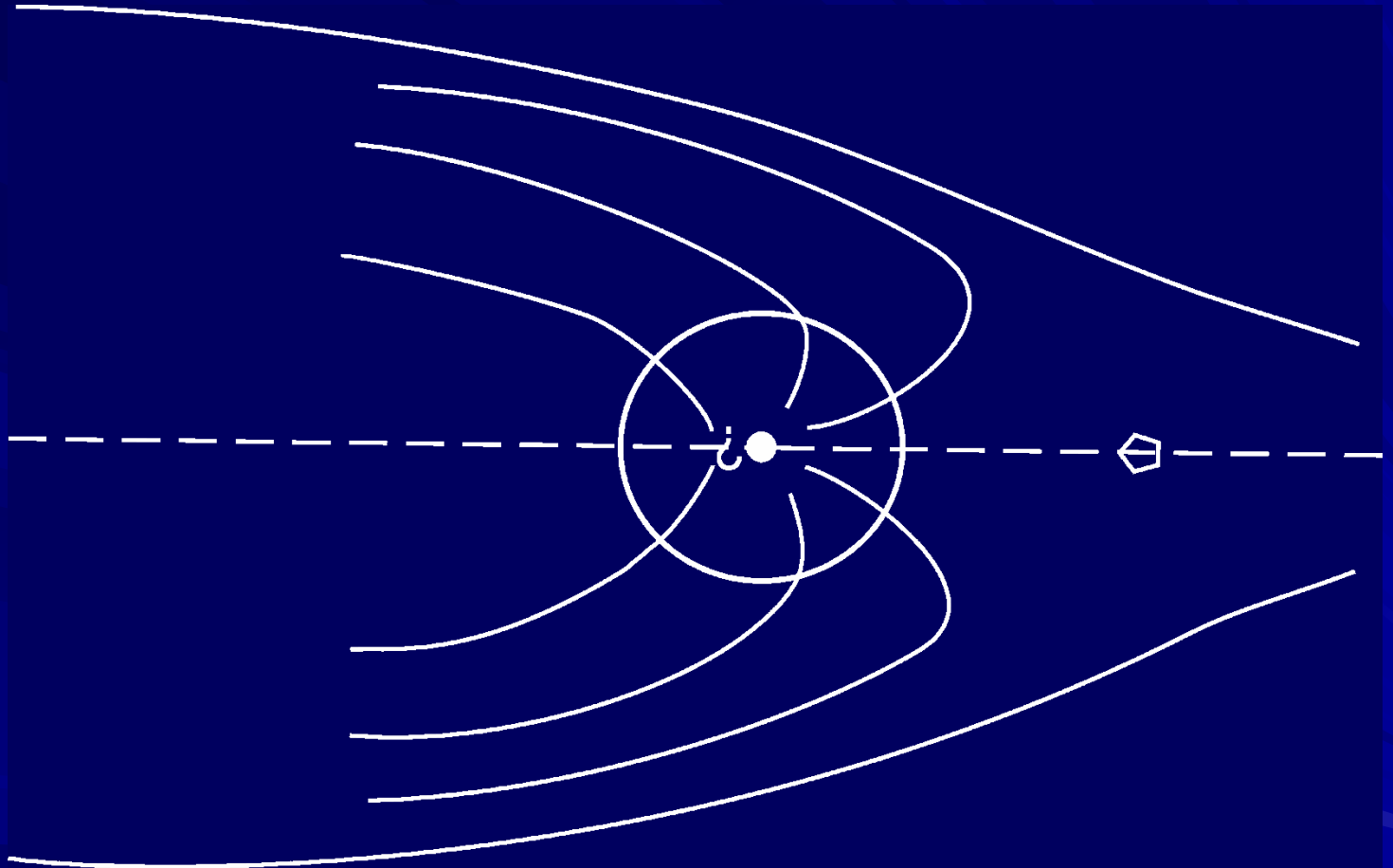
Аналогия с ракетным соплом

Для сопла максимальный расход достигается
при отсутствии ударных волн

Аналогично в случае аккреции =>
Гладкое прохождение звуковой поверхности



Что нас интересует?



Методика численного расчета

- Разложение по безразмерному параметру

$$\varepsilon = \frac{v_{\infty}}{c_{\infty}} \leq 1$$

Для однозначного определения начальных условий

- Разложение по полиномам Лежандра по θ

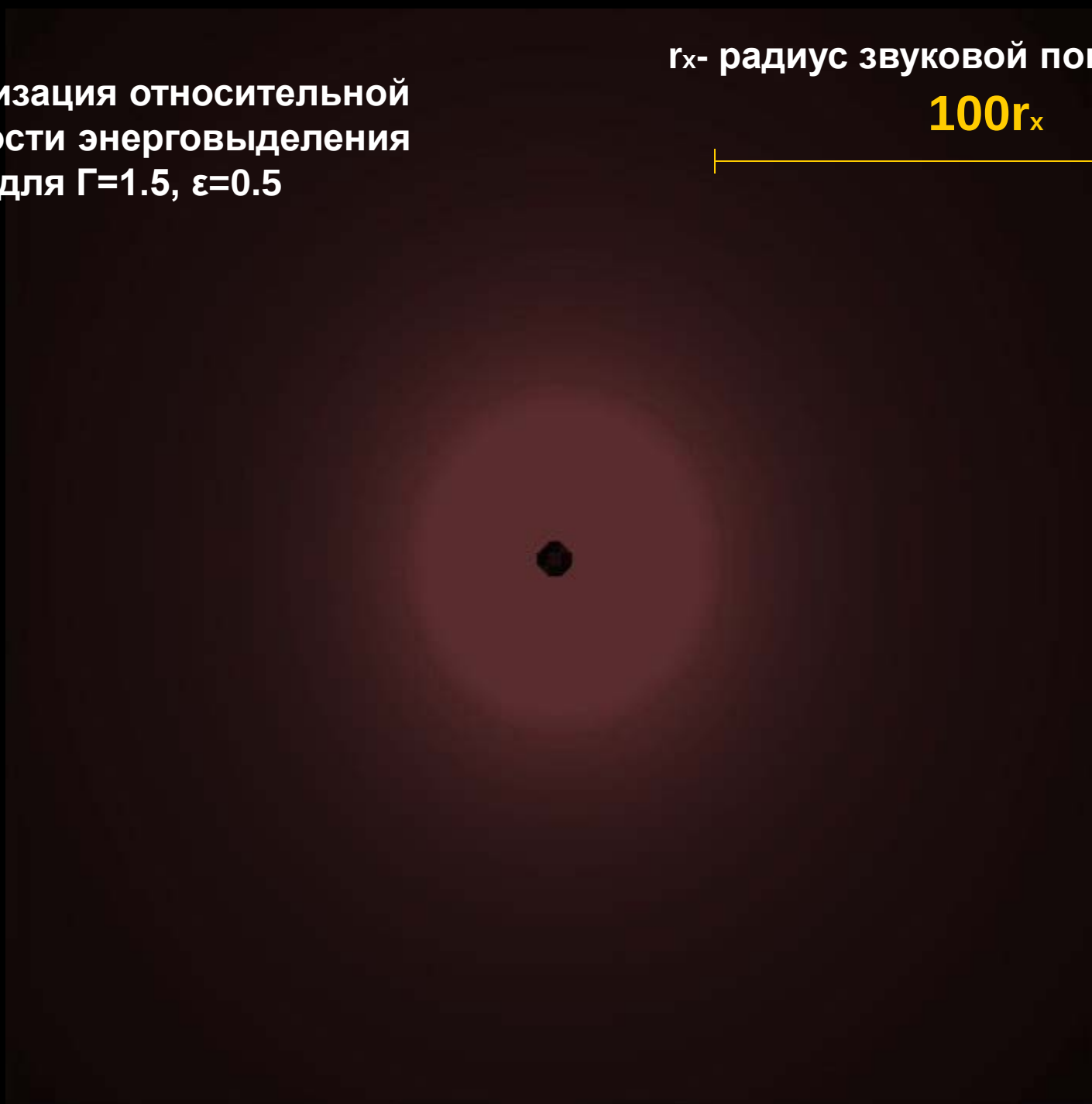
$$\Phi(r, \theta) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \sum_{l=0}^N P_l(\cos \theta) f_{li}(r)$$

Легче решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, чем одно уравнение в частных производных

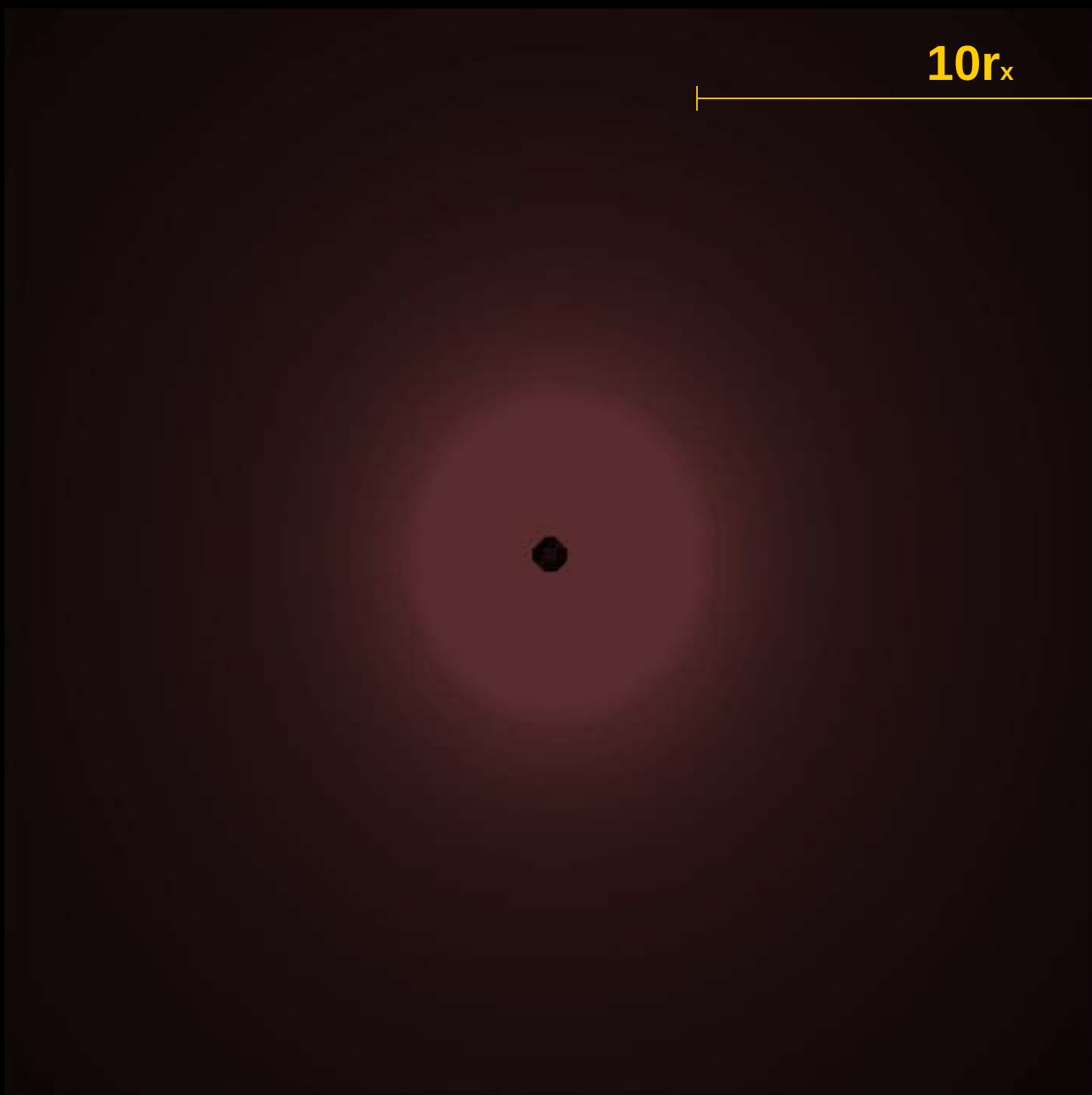
Визуализация относительной
активности энерговыделения
для $\Gamma=1.5$, $\varepsilon=0.5$

r_x - радиус звуковой поверхности

$100r_x$



$10r_x$



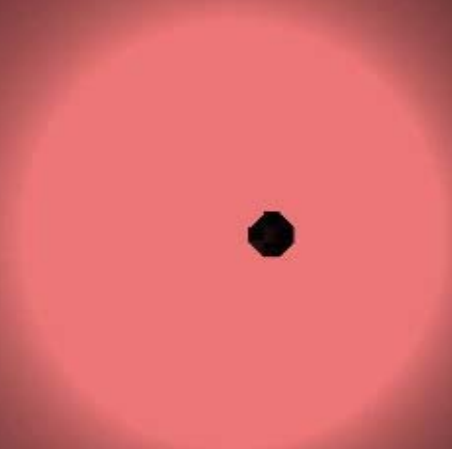
$1r_x$



$0.1r_x$



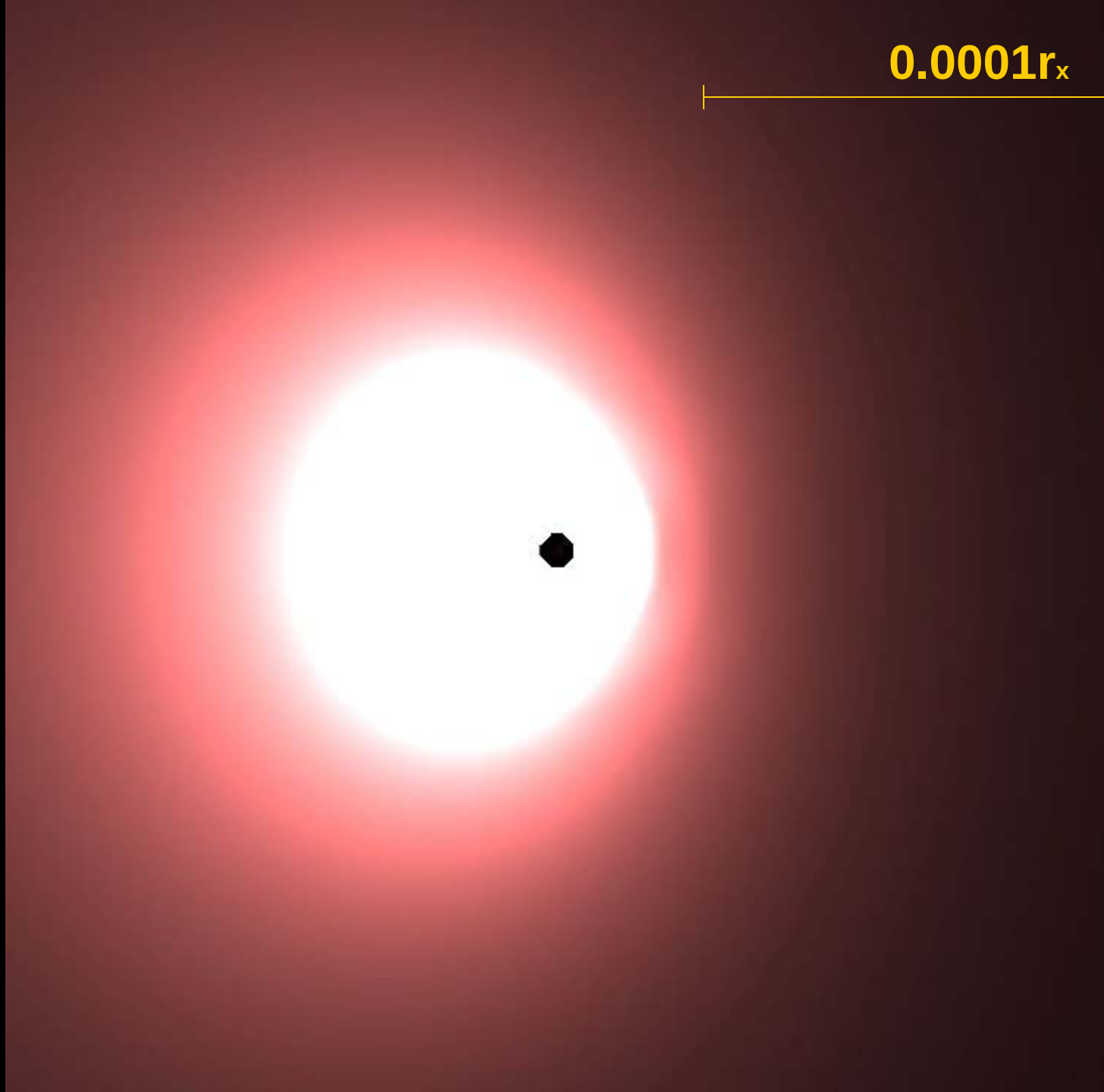
$0.01r_x$



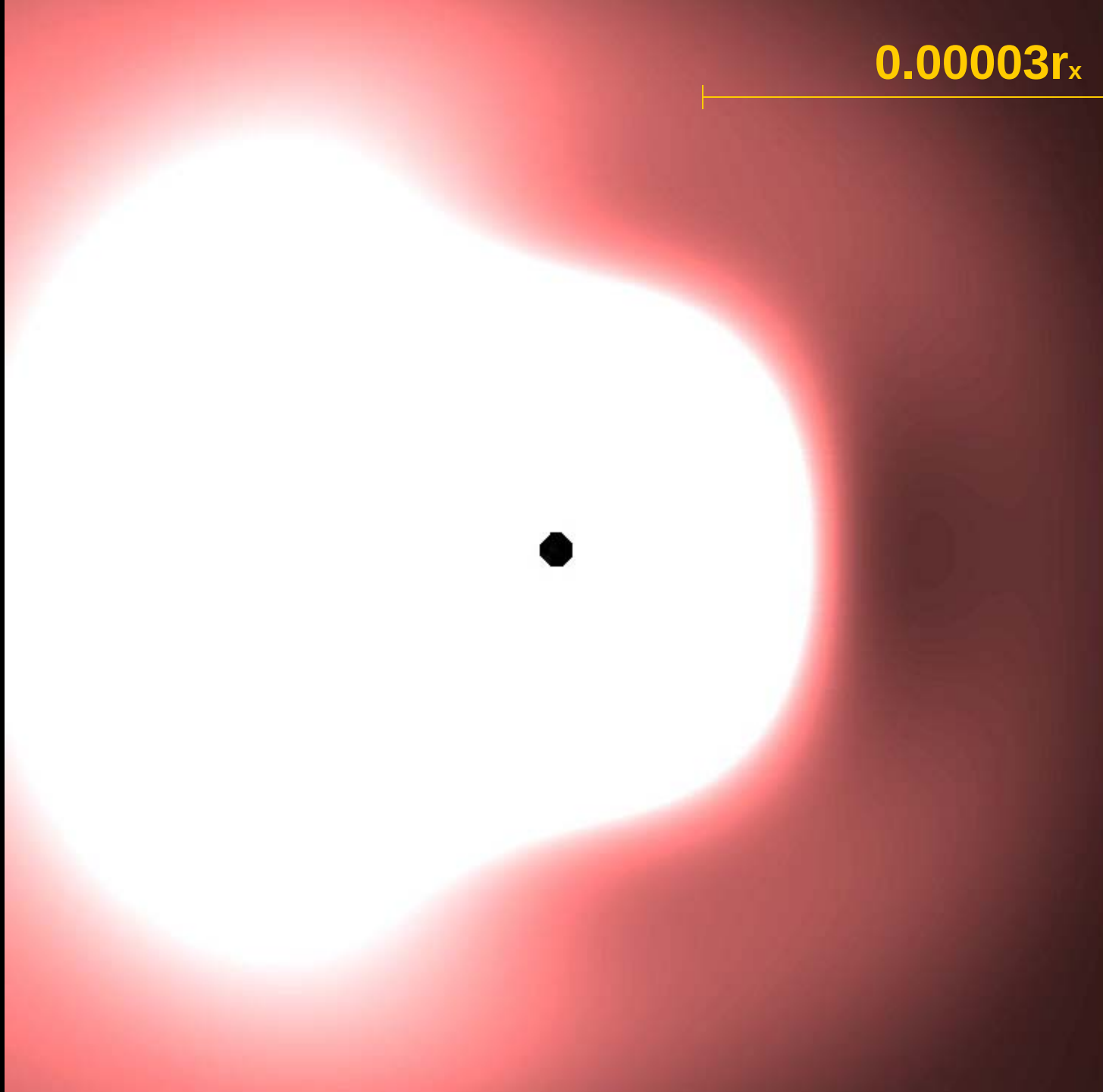
0.001r_x



0.0001 r_x



$0.00003r_x$



Основные результаты

- ✓ Нерадиальные возмущения в сферически симметричной аккреции способны неограниченно усиливаться и приводить к изменению структуры течения вблизи объекта
 - ✓ Эффективность осесимметричной аккреции может намного превышать эффективность сферически симметричного случая
 - ✓ Удачный выбор метода позволил точно рассчитать задачу за несколько минут на обычном компьютере
 - ✓ Подтверждён результат, полученный ранее со значительными упрощениями
- R.V. Shcherbakov, "Region of Anomalous Compression under Bondi–Hoyle Accretion", *Astronomy Letters*, Vol. 31, No. 9, 2005, pp. 591–597.

Summary

■ Основные идеи:

- стационарность, осевая симметрия
- разложение в ряд по безразмерному параметру
- уменьшение количества неизвестных преобразованиями
- перевод уравнения в частных производных в систему дифференциальных уравнений

■ Преимущества:

- рассматриваем широкий круг астрофизических задач
- сохраняем достаточную общность и точность постановки
- делаем надёжные предсказания
- производим вычисления на сравнительно слабых компьютерах